

Turbulence de type Burgers dans la zone de surf

P. Bonneton^a

a. UMR 5805 EPOC, CNRS - Université de Bordeaux,
Allée Geoffroy Saint-Hilaire, F-33615, Pessac, France
philippe.bonneton@u-bordeaux.fr

Résumé :

Dans cette article nous montrons que la turbulence d'onde en zone de surf interne a de nombreuses similarités avec la turbulence de Burgers. En nous appuyant sur des résultats théoriques concernant la turbulence de Burgers nous proposons un modèle décrivant les spectres d'énergie en zone de surf interne. Notre modèle est ensuite validé par rapport à des données expérimentales. A partir de mesures de l'élévation des vagues, notre modèle permet d'estimer le coefficient de diffusion turbulente et de prédire le spectre de dissipation de l'énergie.

Abstract :

In this paper we show that there are many similarities between wave turbulence in the inner surf zone and Burgers' turbulence. Based on Burgers' theoretical results we propose a model for describing energy spectra in the surf zone. Our model is then validated against laboratory data. From wave elevation measurements, our model allows both the estimation of the turbulent diffusion coefficient and to predict the energy dissipation spectrum.

Mots clefs : turbulence de Burgers, turbulence d'onde, ondes non-dispersives, zone de surf interne, ondes en dents de scie.

1 Introduction

Dans l'océan, un état de mer est constitué d'un ensemble de vagues aléatoires qui interagissent non-linéairement. La dynamique de ces états de mer est un exemple emblématique de *turbulence d'onde* (Nazarenko [11]). En eau profonde, la dynamique des vagues est faiblement non-linéaire et fortement dispersive. Ce régime d'onde est caractérisé par un spectre d'énergie suivant une loi de puissance en ω^{-4} (Zakharov and Filonenko [17]), où ω est la fréquence angulaire. A l'approche du rivage, les interactions non-linéaires s'intensifient et conduisent au déferlement. Dans la zone de surf, pour des plages à pente douce, les vagues se réorganisent progressivement en une succession de fronts d'onde turbulents ressemblants à des ressauts propagatifs. De nombreuses études ont montré que la dynamique de ces ondes était très fortement non-linéaire et très faiblement dispersive ([2, 9]). Ceci conduit à la formation d'ondes en dents de scie (cf. figure 1), similaires à celles que l'on peut observer pour d'autres phénomènes ondulatoires non-dispersifs (turbulence de Burgers, ondes acoustiques). Dans cette étude nous analysons les spectres d'énergie pour ce régime de vagues aléatoires en dents de scie en nous inspirant des travaux réalisés pour la turbulence de Burgers.

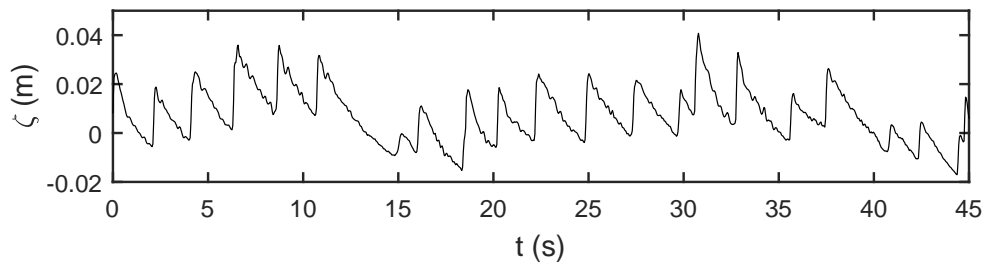


FIGURE 1 – Exemple d’un champ d’ondes en forme de dents de scie en zone de surf interne. Données expérimentales de [16], expérience C3, sonde n°64.

2 Contexte physique

Lorsque les vagues se propagent vers le rivage, la décroissance de la hauteur d’eau induit une augmentation de la hauteur des vagues et des nonlinéarités qui conduit, le plus souvent, au phénomène de déferlement. Après une phase initiale de déferlement (de type plongeant ou déversant) les vagues se réorganisent rapidement sous la forme d’une succession de fronts d’onde similaires à des ressauts en translation. La zone où se propagent ces ressauts se nomme *zone de surf interne* (ZSI). Cette zone joue un rôle significatif lorsque les vagues se propagent sur des plages de faible pente et de forme régulière. Les propriétés statistiques des vagues aléatoires en ZSI varient très lentement dans l’espace. De nombreuses études ont montré que dans cette zone le champ d’onde était pratiquement non-dispersif. Ceci est illustré par la figure 1 qui montre la présence d’ondes en dents de scie (ODS). En effet, ces dernières sont propres aux systèmes d’onde nonlinéaires et non-dispersifs, tels que la turbulence de Burgers ou l’acoustique nonlinéaire (cf. Gurbatov [8]). Il est donc naturel d’utiliser les équations nonlinéaires non-dispersives de Saint Venant pour décrire les ODS en milieu peu profond. Les solutions faibles de ces équations donnent une bonne description de la transformation nonlinéaire des vagues ainsi que de leur dissipation (cf. Bonneton [2]).

Dans cette étude nous ne décrivons pas les fronts d’onde par des chocs discontinus mais en introduisant un coefficient de diffusion turbulente ν_t dans les équations de Saint Venant :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = \nu_t \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu_t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2)$$

où U est la vitesse potentielle moyennée suivant la verticale, $h = \zeta + d$ la hauteur d’eau, ζ l’élévation de la surface libre, $d(x)$ la profondeur d’eau au repos et g l’accélération de la gravité. Si il est courant d’introduire un terme de diffusion turbulente (i.e. viscosité turbulente) dans l’équation de la quantité de mouvement (2), afin de paramétriser la turbulence, il est en revanche inhabituel d’introduire un terme de diffusion dans l’équation de conservation de la masse (1). Cette démarche est cependant en accord avec celle de Dutykh et Dias [7] pour décrire les écoulements visqueux à surface libre. En supposant que les effets visqueux sont faibles ils montrent que la composante rotationnelle du champ de vitesse joue un rôle de type diffusif dans l’équation (1). Une extension empirique de ce modèle pour des vagues en zone de surf a été validée avec succès par Cienfuegos et coll. [6].

Pour des plages en pente douce on peut négliger les ondes réfléchies et se ramener à une équation unidirectionnelle. En considérant que la dynamique des ODS est principalement contrôlée par un équilibre entre les termes nonlinéaires et les termes diffusifs l'équation unidirectionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{h_0} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu_t \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (3)$$

où h_0 est la profondeur d'eau moyenne et $c_0 = \sqrt{gh_0}$. Dans le référentiel se déplaçant à la vitesse c_0 et en faisant le changement de variable $v = \frac{3c_0}{2h_0} \zeta$ l'équation (3) devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu_t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Le coefficient de diffusion turbulente ν_t est une fonction du temps et de l'espace. Cependant, pour simplifier le problème nous allons considérer, dans la section suivante, que ν_t est constant ($\nu_t = \nu$). L'équation (4) est alors l'équation bien connue de Burgers.

3 Turbulence de Burgers à nombre de Reynolds modérés

L'équation (4) a été introduite par Burgers [5] comme un modèle simplifié 1D de la turbulence. De très nombreuses études se sont appuyées sur ces équations afin de mieux comprendre les écoulements turbulents (Bec et Khanin [1]). Nous verrons par la suite que la turbulence de Burgers possède de nombreuses similarités avec la turbulence d'onde en ZSI. Pour des conditions initiales aléatoires, le champ d'ondes Burgers tend vers un profil irrégulier en dents de scie, similaire à celui qu'on peut observer en ZSI (cf. figure (1)). Dans cet article nous nous intéressons aux régimes d'ondes en dents de scie (ODS). Ceux-ci sont caractérisés par le nombre de Reynolds $Re = \frac{V_c \lambda_m}{\nu}$, où λ_m est la longueur d'onde moyenne des vagues et V_c l'échelle caractéristique du saut de v au niveau des fronts d'onde. Pour des grands Re , il a été établi que dans le domaine inertiel (k compris entre $k_m = 2\pi/\lambda_m$ et le nombre d'onde diffusif k_ν ($k_\nu \sim V_c/\nu$)), le spectre d'énergie $E_v(k)$ suit une loi de puissance en k^{-2} (cf. Tatsumi [13]). Ce domaine inertiel est suivi, à grands k , par un domaine diffusif où l'énergie décroît très rapidement.

La majorité des études sur la turbulence de Burgers a porté sur des cas à grands Re et donc à très large domaine inertiel. Nous verrons à la section 4 que les ODS en ZSI sont caractérisées par des Re modérés compris approximativement entre 100 et 600, et donc par des domaines inertiels de dimension modérée. Nous nous focalisons donc dans cet article sur ce type de régime turbulent, pour lequel le domaine diffusif occupe une place importante dans le spectre d'énergie.

Nous considérons un champ de vagues aléatoires statistiquement homogène et en décroissance libre. Notre approche s'appuie sur le travail de Saffman [12]. Ce dernier a estimé la fonction d'autocorrélation $R(r, t) = \langle v(x, t)v(x+r, t) \rangle$ en supposant que la structure des fronts d'onde pouvait être estimée à partir de la solution théorique des ODS périodiques. La transformée de Fourier de $R(r, t)$, après avoir corrigé des erreurs dans la formulation de Saffman [12], nous donne l'équation suivante pour le spectre d'énergie :

$$E_v(k, t) = 2\nu^2 k_m(t) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{k}{k_\nu(t)} \right), \quad (5)$$

où $k_\nu = \frac{V_c}{2\pi\nu}$ est le nombre d'onde diffusif. Par soucis de simplicité je vais omettre par la suite la variable temporelle t dans les équations.

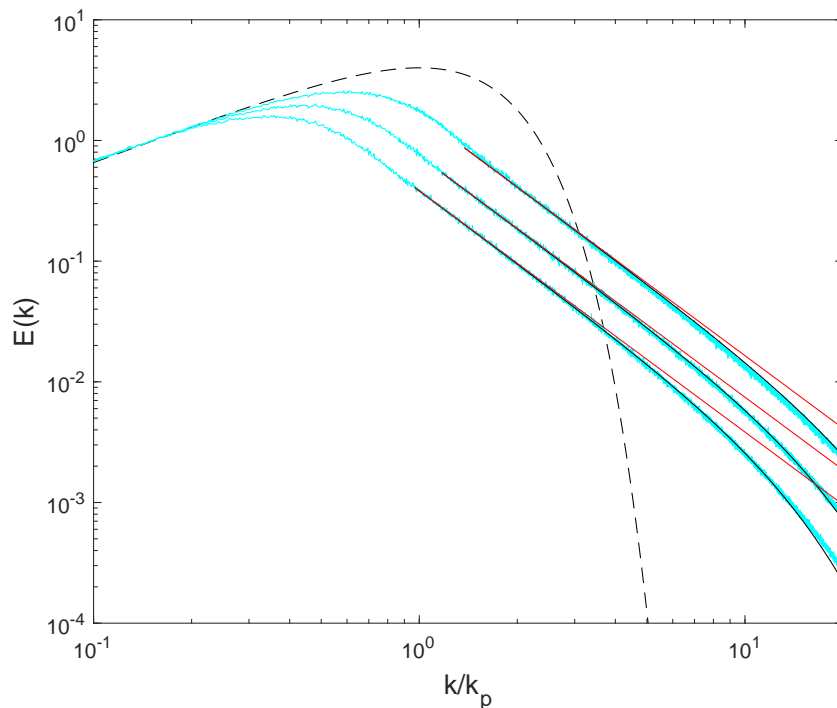


FIGURE 2 – Evolution temporelle du spectre d'énergie pour une condition initiale donnée par l'équation (11). Ligne tiretée, condition initiale; ligne cyan, simulation numérique aux temps adimensionnés $t/t_* = 1.45, 2.90$ and 4.85 (correspondant aux nombres de Reynolds, $R_B = 443, 380$ and 363), où $t_* = \frac{1}{k_p \sqrt{E_{T0}}}$; ligne noire, modèle théorique (5) tracé à partir de $k = k_m$; ligne rouge, loi de puissance en k^{-2} (equation (7)). La longueur du domaine couvre $2^8 \lambda_p$ et est discrétisée sur 2^{16} points de grille. Les spectres sont moyennés sur 1000 réalisations.

En intégrant l'équation (5) de k_m à ∞ on trouve

$$\tilde{E}_v = 2\nu^2 k_m k_\nu (\coth(k_m/k_\nu) - 1) , \quad (6)$$

où $\tilde{E}_v = \int_{k_m}^{\infty} E_v(k) dk$ est l'énergie totale.

Pour $k \ll k_\nu$ le spectre d'énergie suit une loi en k^{-2} qui est indépendante de ν :

$$E_v(k) = \left(\frac{k_m V_c^2}{2\pi^2} \right) k^{-2} , \quad (7)$$

et pour $k \gg k_\nu$, $E_v(k)$ décroît exponentiellement avec k :

$$E_v(k) = 8\nu^2 k_m \exp\left(-2 \frac{k}{k_\nu}\right) . \quad (8)$$

Le spectre de dissipation, $D_v(k, t) = 2\nu k^2 E_v(k, t)$, est donné par

$$D_v(k) = 4\nu^3 k_m k^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{k}{k_\nu}\right) , \quad (9)$$

et sa forme asymptotique pour k petit est :

$$D_v(k) = \frac{\nu^2 k_m V_c^2}{\pi^2} . \quad (10)$$

Il est important de noter qu'aux grandes échelles le spectre de dissipation est constant. Ceci signifie qu'il y a une équipartition de la dissipation d'énergie dans le spectre.

Afin de tester la validité du modèle théorique (5) nous avons résolu numériquement l'équation de Burgers avec une méthode spectrale. La condition initiale, $v_0(x) = v(x, 0)$, est spécifiée dans le domaine de Fourier par le spectre d'énergie suivant :

$$E_0(k) = E_0 \frac{k}{k_p} \exp\left(-\frac{1}{2}((k/k_p)^2 - 1)\right) , \quad (11)$$

où $k_p = 2\pi/\lambda_p$ est le nombre d'onde pic et E_0 l'énergie à k_p . La phase de chaque k est tirée aléatoirement entre 0 et 2π . Les spectres calculés sont estimés à partir d'une moyenne d'ensemble sur 1000 réalisations. La figure 2 montre l'évolution de E_v à différents instants t . Pour chaque t nous calculons λ_m . Pour λ_m et \tilde{E}_v connus on peut déterminer k_ν à partir de l'équation implicite (6). λ_m et k_ν étant connus on peut comparer la théorie (5) avec les simulations numériques. La figure 2 montre qu'il y a un bon accord entre les deux. En particulier, la transition entre le domaine inertiel en k^{-2} et le domaine diffusif est bien représentée. Il faut cependant noter que pour des très grands k (k supérieur à quelques dizaines de k_p), la relation (5) sous-estime l'énergie des ondes.

4 Turbulence d'onde dans la zone de surf interne

Nous revenons dans cette section sur la propagation des vagues en zone de surf interne sur un fond en pente douce. Les vagues ne sont plus homogènes en espace et leur statistique, ainsi que ν_t , varient lentement avec x . En utilisant le changement de variable $\zeta = \frac{2h_0}{3c_0}v$ et en considérant que le champ de vague est advecté à la vitesse c_0 on peut obtenir, à partir de l'équation (5), le spectre d'énergie de l'élévation ζ dans le domaine fréquentiel :

$$E(\omega) = 2\nu_*^2 \omega_m c_s c h^2 \left(\frac{\omega}{\omega_\nu} \right) \quad (12)$$

où $\omega_\nu = \frac{H_c}{2\pi\nu_*}$, $\nu_* = \frac{2}{3} \frac{\nu_t}{g}$ et H_c est la hauteur caractéristique des chocs.

Afin de tester la validité de ce modèle nous nous sommes appuyés sur l'expérience en laboratoire C3 de van Noorloos [16]. Dans cette expérience le champ d'onde à l'entrée du domaine est donné par un spectre de Jonswap avec une fréquence pic de 2 Hz et une hauteur significative des vagues de 10 cm. Nous nous intéressons ici à 8 sondes mesurant l'élévation des vagues, situées dans la ZSI à différentes profondeurs.

Contrairement au cas Burgers décrit à la section 3, le coefficient de diffusion turbulente ν_t est ici une inconnue du problème. Afin d'évaluer ν_t nous avons utilisé une méthode nonlinéaire des moindres carrés pour ajuster chaque spectre mesuré avec le modèle théorique (12). Le coefficient ν_t étant déterminé on peut alors comparer le spectre théorique (12) aux mesures expérimentales (cf. figure 3). Ces mesures montrent, évidemment, une décroissance de l'énergie des vagues déferlées au cours de leur propagation, mais surtout une augmentation de la longueur d'onde moyenne λ_m (i.e. diminution de k_m). Ce phénomène, que l'on observe aussi dans le cas Burgers (figure 2), est lié au processus d'appariement des

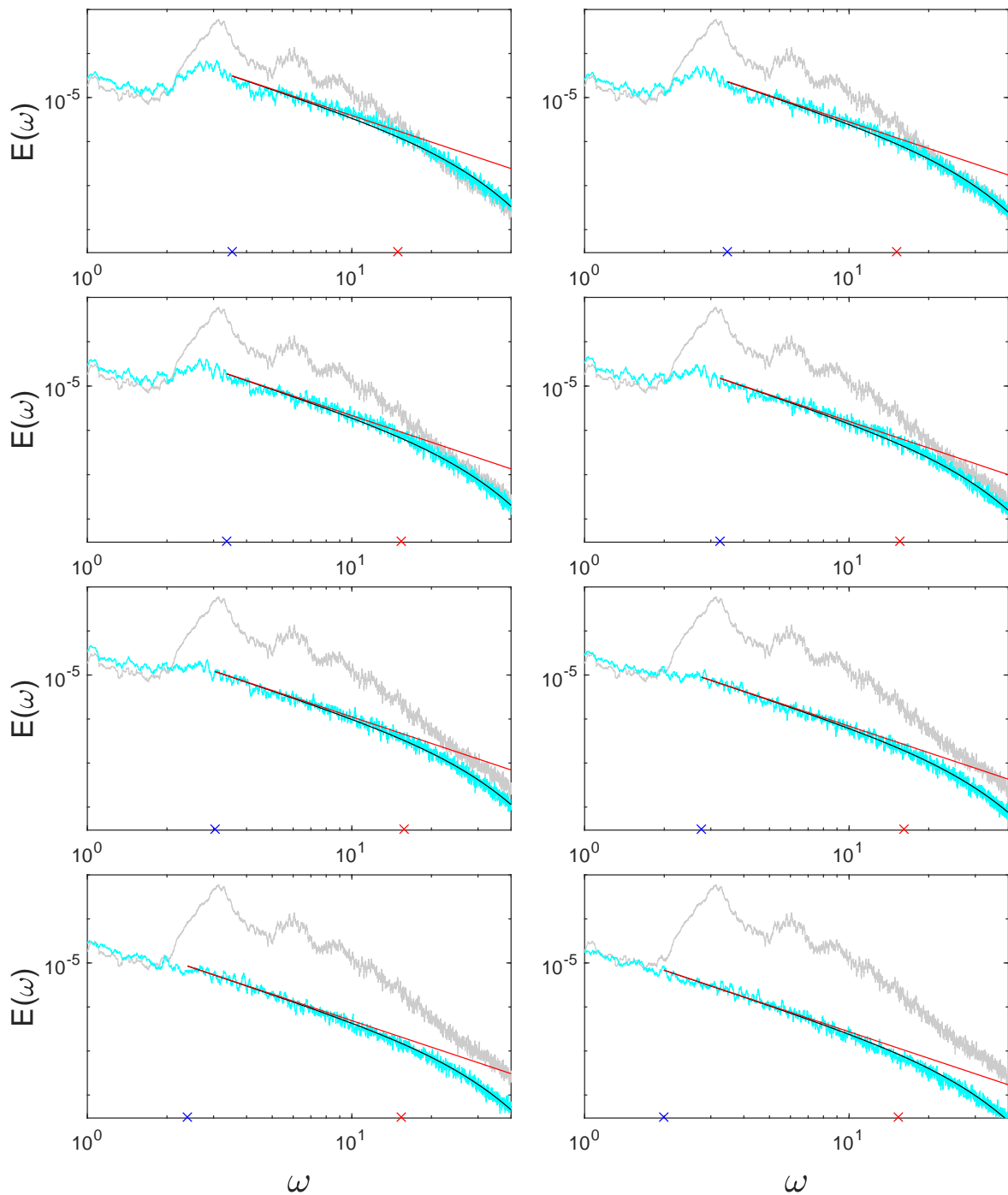


FIGURE 3 – Evolution du spectre d'énergie dans la zone de surf interne pour différentes profondeurs d'eau. Expériences en laboratoire de van Noorloos [16] (cas C3) pour des vagues aléatoires se propageant sur une plage de pente 1/35. Ligne grise, spectre au début de la zone de déferlement ; ligne cyan, mesures en ZSI ; ligne noire, modèle théorique (12) ; ligne rouge, loi de puissance en ω^{-2} . Croix bleue, ω_m ; croix rouge, ω_ν .

fronts d'onde. Ce processus a été observé pour des vagues se propageant aussi bien en laboratoire [15] que dans l'océan [3].

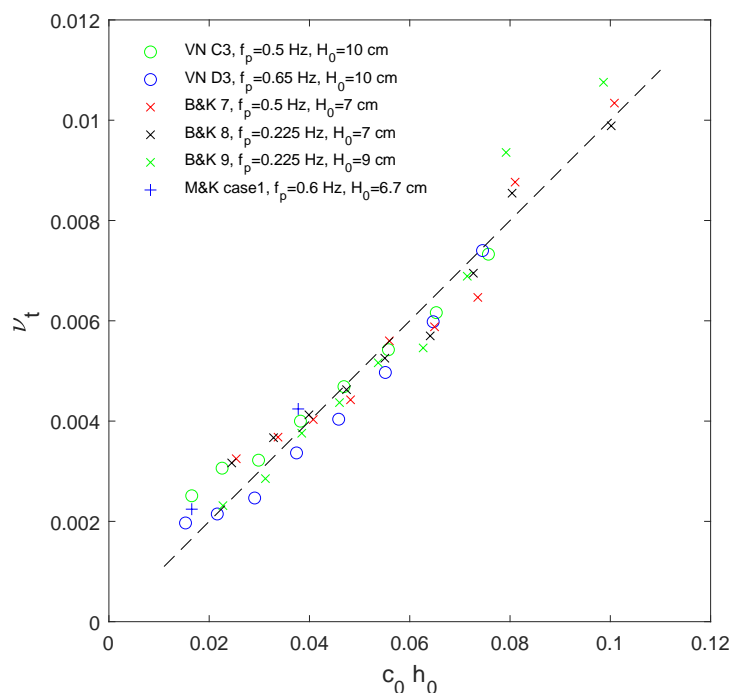


FIGURE 4 – Evolution du coefficient de diffusion turbulente en fonction de $c_0(x)h_0(x)$. Expériences de laboratoire : VN C3 et VN D3, van Noorloos [16] ; B&K7, B&K8 et B&K9, Bowen et Kirby [4] ; M&K case1, Mase and Kirby [10].

On constate sur la figure 3 que, contrairement au cas Burgers, l'échelle de diffusion $\omega_\nu = \frac{H_c}{2\pi\nu_*}$ ne décroît pas au cours de la propagation des vagues. Ceci indique que le coefficient de diffusion turbulente augmente lorsque la profondeur d'eau $h_0(x)$, et donc la hauteur des fronts d'onde H_c , diminue.

Nous nous sommes concentrés sur la caractérisation de ν_t en analysant 6 jeux de données ayant des conditions de forçage des vagues très différentes. La figure 4 montre que ν_t évolue suivant la relation :

$$\nu_t(x) = \alpha c_0(x)h_0(x) = \alpha\sqrt{g}h_0^{3/2}, \quad (13)$$

où $\alpha \simeq 0.1$. A partir de mesures très fines de la turbulence hydrodynamique de petite échelle en ZSI, Ting et Kirby [14] avaient trouvé une loi pour le coefficient de diffusion turbulente très voisine de celle donnée par (13). Il s'agit d'un résultat important qui montre que l'analyse des spectres d'élévation, à l'échelle de la turbulence d'onde (grande échelle), permet d'obtenir des informations sur les propriétés de diffusion turbulente (turbulence hydrodynamique de petite échelle). Les équations (9) et (13) permettent de décrire le spectre de dissipation de la turbulence d'onde en ZSI. Le taux de dissipation total $\mathbf{D} = \int_0^\infty D(k)dk$, qui est fini, correspond au taux d'injection de l'énergie turbulente à l'échelle intégrale k_I , voisine de k_ν .

5 Conclusion

Dans cet article nous avons obtenu un modèle théorique permettant de décrire les spectres d'énergie associés à la turbulence d'onde en zone de surf interne. Cette approche permet, à partir de mesures d'élévation des vagues, d'obtenir le spectre de dissipation d'énergie des vagues, ainsi que des informations sur la diffusion turbulente à petite échelle. Ce travail devrait ouvrir de nombreuses perspectives. En

effet, il est extrêmement difficile de mesurer la turbulence hydrodynamique et la dissipation associée en milieu océanique, car les conditions expérimentales en zone de surf sont particulièrement énergétiques. En revanche, de nouvelles méthodes expérimentales basées sur des techniques de télédétection lidar permettent de mesurer précisément et à haute fréquence l'élévation des vagues en zone de surf (Martins et coll. [9]), même lors de tempêtes. En associant ces techniques et l'approche théorique présentée dans cet article nous allons pouvoir mieux caractériser la dynamique des vagues en zone de surf.

Remerciements

Je tiens à remercier A. van Dongeren et J. Kirby de m'avoir transmis les données expérimentales utilisées dans cet article.

Références

- [1] Bec, J., and Khanin, K. (2007). Burgers turbulence. *Physics reports*, **447**(1-2), 1-66.
- [2] Bonneton, P. 2007. Modelling of periodic wave transformation in the inner surf zone, *Ocean Engineering*, **34**, 1459-1471.
- [3] Bonneton, P., Marieu, V., Dupuis, H., Sénéchal, N., and Castelle, B. (2004). Wave transformation and energy dissipation in the surf zone : comparison between a non-linear model and field data. *J. Coast. Res*, **39**, 329-3333.
- [4] Bowen, G. D., and Kirby, J. T. (1994). Shoaling and breaking random waves on a 1 : 35 laboratory beach. University of Delaware, Department of Civil Engineering, Center for Applied Coastal Research.
- [5] Burgers, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *In Advances in applied mechanics* (Vol. 1, pp. 171-199). Elsevier.
- [6] Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P. 2010 A wave-breaking model for Boussinesq-type equations including mass-induced effects. *J. Waterway, Port Coastal and Ocean Engrg*, **136**, 10-26.
- [7] Dutykh, D., and Dias, F. (2007). Viscous potential free-surface flows in a fluid layer of finite depth. *Comptes Rendus Mathématique*, **345**(2), 113-118.
- [8] Gurbatov, S. N., Rudenko, O. V., and Saichev, A. I. (2012). Waves and structures in nonlinear nondispersive media : general theory and applications to nonlinear acoustics. *Springer Science & Business Media*.
- [9] Martins, K., Bonneton, P., Mouragues, A., and Castelle, B. (2020). Non-hydrostatic, Non-linear Processes in the Surf Zone. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, **125**(2), doi.org/10.1029/2019JC015521.
- [10] Mase, H., and Kirby, J. T. (1993). Hybrid frequency-domain KdV equation for random wave transformation. *Coastal Engineering* 1992,474-487.
- [11] Nazarenko, S. (2011), *Wave Turbulence*, 279 pp., Springer, Berlin.
- [12] Saffman, P. G. (1968). Lectures on homogeneous turbulence. *Topics in nonlinear physics*, ed. N.J. Zabusky. New York : Springer, 485-614.
- [13] Tatsumi, T. (1969). Nonlinear Wave Expansion for Turbulence in the Burgers' Model of a Fluid. *The Physics of Fluids*, **12**(12), 258-254.

-
- [14] Ting, F. C., and Kirby, J. T. (1996). Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker. *Coastal Engineering*, **27**(3-4), 131-160.
- [15] Tissier, M. F. S., Bonneton, P., and Ruessink, B. G. (2017). Infragravity waves and bore merging. In Proceedings Coastal Dynamics 2017 (pp. 451-460).
- [16] van Noorloos, J. C. (2003), Energy transfer between short wave groups and bound long waves on a plane slope, *Master's thesis, Delft Univ. of Technol.*, Delft, Netherlands.
- [17] Zakharov, V. E. E., and Filonenko, N. N. (1966). Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a liquid. In *Doklady Akademii Nauk*, Russian Academy of Sciences, **170**(6), 1292-1295.