

Note sur la propagation des vagues en zone de surf interne

Philippe BONNETON

Département de géologie et d'océanographie, UMR CNRS 5805, Université de Bordeaux I, France
Courriel : p.bonneton@geocean.u-bordeaux.fr

(Reçu le 11 juillet 2000, accepté après révision le 23 octobre 2000)

Résumé. Nous présentons dans cet article une étude théorique sur la propagation des vagues en zone de surf interne. Nous analysons les processus de distorsion et de dissipation des vagues à partir de la théorie hyperbolique des ondes de choc appliquée aux équations de Saint-Venant. Cette approche théorique nous a permis d'obtenir un modèle analytique décrivant la propagation des vagues déferlées sur fond lentement variable. Nous montrons que ce modèle est en très bon accord avec les expériences réalisées en canal à houle par Stive (1984). © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

vague / zone de surf / équations de Saint Venant / système hyperbolique / onde de choc / onde en dents de scie

A note on wave propagation in the inner surf zone

Abstract. *In this paper we present a theoretical study on wave propagation in the inner surf zone. We analyze wave distortion and dissipation processes from the hyperbolic theory for shock wave applied to Saint-Venant equations. From this theoretical approach we obtain an analytical model for broken waves propagation on a gently sloping bottom. We show that there is a very good agreement between this model and wave flume experiments performed by Stive (1984). © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

surface wave / surf zone / Saint Venant equations / hyperbolic system / shock wave / sawtooth wave

Abridged English version

As the waves propagate shoreward to gradually smaller depth, their height and their steepness increase. This generally leads to the wave-breaking phenomenon, which is associated with strong turbulent motions. On gently sloping beaches we usually observe that after wave-breaking, the wave field reorganizes itself into periodic borelike waves. This region has been termed the 'inner surf zone' (ZSI) (see [1]). Following Le Méhauté [2], most theoretical models describing the wave dynamics in this zone are based on the resemblance between broken waves and hydraulic jumps (bores). However, the hydraulic jump is a special case of a shock wave reaching its full strength immediately, whereas in the ZSI a continuous wave distortion controls the shock intensity. In this paper we present a theoretical analysis of wave distortion and dissipation processes in the ZSI. This analysis is based on the hyperbolic theory for shock wave applied to Saint-Venant equations. Indeed, Kobayashi et al. [3] and Bonneton et al. [4] have shown that these equations are relevant to describe broken wave in the ZSI. First, we derive shock conditions for the Saint-Venant

Note présentée par Sébastien CANDEL.

equations. Second, we introduce the concept of ‘simple wave’ and finally we apply it to determine broken wave propagation in the ZSI on a gently sloping bottom.

The Saint-Venant equations in conservation form are given by (1) and (2), where $u(x, t)$ is the depth-averaged water velocity, $h(x, t)$ is the total water depth, $d(x)$ is the still water depth and g is the gravitational acceleration. This hyperbolic system may be expressed in the form of two characteristic equations (3). For the special case in which the bottom slope β ($\beta = -\partial d/\partial x \geq 0$) is constant the Riemann invariants are: $\alpha^\pm = u \pm 2c + \beta gt$ along characteristic curves C^\pm defined by $dx/dt = u \pm c$. Wave fronts which develop in the ZSI can be approximated by introducing discontinuities satisfying shock conditions based on mass and momentum conservation across the shock (equations (4) and (5)). Using subscript 1 for values ahead of the shock and subscript 2 for values behind, the shock conditions may also be written in the form given by (6) and (7). Two solutions are possible depending on the sign of ϵ , but only one physical solution exists. To clarify this point it is necessary to study the energy balance across a shock. In continuous parts of the flow, a conservation equation for the energy (8) can be derived from equations (1) and (2). However, when shock occurs the energy is no longer conserved. The energy dissipation \mathcal{D} across a shock is given by $\mathcal{D} = -[\mathcal{F}] + U[\mathcal{E}]$ (see [5]), which leads to equation (9). Finally, if we postulate that the particles crossing the shock must lose energy, the shock is then characterized by equations (10), (11) and (12). The solution of these equations for the propagation of broken wave in the ZSI requires to use numerical methods. However, this problem can be considerably simplified if we consider that in the ZSI, on gentle sloping bottom, the reflected waves are negligible in comparison with the incident waves. In the following, we analyze the propagation of this type of waves, which has been termed ‘simple waves’.

When a simple wave propagates in the positive x -direction through a flat bottom ($d = d_0$), the Riemann invariant α^- is constant ($\alpha^- = \alpha_0^-$). If initially the water is at rest the Riemann invariant α^- becomes $\alpha_0^- = -2c_0$ and the simple wave model reduces to (13) with an approximate shock condition given by (14). First, we have shown that for shocks occurring in the ZSI we can neglect changes in the Riemann invariant α^- (figure 1a) and second, we have verified that (14) is a good approximation of the exact shock conditions given by equations (10) and (11) (see figure 1b). From this simple wave model we have described the wave distortion leading to the sawtooth shape and obtained an analytical formula for the wave height decay on a flat bottom (19).

Finally, we have applied this theory to estimate the mean flux of wave energy \overline{F} and the energy dissipation \overline{D} for broken waves propagating on a gentle sloping bottom (21). From the steady state equation governing energy balance (22) we have got an analytical solution (24) for the wave height decay. Figure 2 shows that there is a very good agreement between this analytical model and wave flume experiments performed by Stive [7].

1. Introduction

La houle à l’approche de la côte voit son amplitude et sa cambrure augmenter en même temps que la profondeur d’eau diminue. Ceci conduit généralement au phénomène de déferlement, qui est associé à des mouvements turbulents intenses. Pour des plages de pente faible à modérée on observe fréquemment après le déferlement une réorganisation des vagues sous la forme d’une succession périodique de fronts d’onde, dans une zone que l’on dénomme « zone de surf interne » (ZSI) (cf. [1]). Depuis les travaux de Le Méhauté [2], la majorité des modèles théoriques proposés pour décrire la dynamique de ces vagues repose sur l’analogie entre les fronts d’onde de la ZSI et les ressauts hydrauliques propagatifs. Cependant, le ressaut hydraulique est un cas particulier d’onde de choc, où le front d’onde se forme instantanément, alors que dans la ZSI la distorsion progressive des ondes contrôle l’intensité des chocs. Dans cet article nous proposons une analyse de la distorsion et de la dissipation des vagues en ZSI, à partir de la théorie des ondes hyperboliques appliquée aux équations de Saint-Venant. En effet, comme l’ont montré Kobayashi et

al. [3] et Bonneton et al. [4], ces équations donnent une très bonne description de la propagation des vagues déferlées en ZSI. Après avoir brièvement rappelé à la section 2 les conditions de saut pour les équations de Saint-Venant en présence de choc, nous introduirons à la section 3 le concept « d'onde simple », que nous appliquerons tout d'abord à la dynamique des ondes sur fond plat, puis à la section 4 à la propagation des vagues en ZSI sur fond lentement variable.

2. Conditions de saut et dissipation

Les équations de Saint-Venant sous forme conservative s'écrivent :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) = gh\frac{\partial d}{\partial x} \quad (2)$$

où $u(x, t)$ est la vitesse moyennée suivant la verticale, $h(x, t)$ est la hauteur d'eau, $d(x)$ est la profondeur de l'eau au repos et g est la gravité. Ce système hyperbolique peut s'écrire de façon équivalente sous la forme de deux équations caractéristiques :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (u \pm 2c) = g \frac{\partial d}{\partial x} \quad (3)$$

où $c = (gh)^{1/2}$. Dans le cas particulier où la pente du fond β ($\beta = -\partial d/\partial x \geq 0$) est constante, les invariants de Riemann sont : $\alpha^\pm = u \pm 2c + \beta gt$ le long des courbes caractéristiques C^\pm définies par $dx/dt = u \pm c$.

Les fronts d'onde que l'on observe dans la ZSI peuvent être assimilés à des chocs. Pour les décrire, on introduit des discontinuités satisfaisant des conditions de saut, basées sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement à travers le choc :

$$-U[h] + [hu] = 0 \quad (4)$$

$$-U[hu] + \left[hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right] = 0 \quad (5)$$

Les crochets indiquent le saut des quantités et U est la vitesse du choc. Nous utiliserons l'indice 1 pour les valeurs à l'avant du choc et l'indice 2 à l'arrière. Les conditions de saut peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$u_1 - U = \epsilon \left(\frac{gh_2}{2h_1} (h_2 + h_1) \right)^{1/2} \quad (\epsilon = \pm 1) \quad (6)$$

$$u_2 - U = \epsilon \left(\frac{gh_1}{2h_2} (h_2 + h_1) \right)^{1/2} \quad (7)$$

Il existe une indétermination concernant le signe de $u_1 - U$ et $u_2 - U$, qui ne peut être levée qu'en analysant l'évolution de l'énergie à travers un choc. Dans les régions où l'écoulement varie de façon continue, on peut obtenir une équation de conservation de l'énergie \mathcal{E} à partir des équations (1) et (2) :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

où,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho(hu^2 + g(h-d)^2), \quad \mathcal{F} = \rho hu \left(\frac{1}{2}u^2 + g(h-d) \right)$$

P. Bonneton

et ρ est la densité du fluide. En présence d'un choc il n'y a plus conservation de l'énergie. La dissipation d'énergie \mathcal{D} à travers le choc est donnée par $\mathcal{D} = -[\mathcal{F}] + U[\mathcal{E}]$ (cf. Stoker [5]). A partir des conditions de saut (6) et (7) on obtient :

$$\mathcal{D} = -\epsilon \frac{\rho g}{4} (h_2 - h_1)^3 \left(\frac{g(h_2 + h_1)}{2h_1 h_2} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Si l'on postule que les particules de fluide qui traversent le choc perdent de l'énergie (condition d'entropie) on lève l'indétermination : $\epsilon = -1$. Le choc est alors caractérisé par :

$$u_1 - U = - \left(\frac{gh_2}{2h_1} (h_2 + h_1) \right)^{1/2} \quad (10)$$

$$u_2 - U = - \left(\frac{gh_1}{2h_2} (h_2 + h_1) \right)^{1/2} \quad (11)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\rho g}{4} (h_2 - h_1)^3 \left(\frac{g(h_2 + h_1)}{2h_1 h_2} \right)^{1/2} \quad (12)$$

Le calcul de la propagation des vagues en ZSI à partir de la résolution du système d'équations complet (3), (10) et (11) ne peut se faire qu'au moyen de la simulation numérique. Cependant, on peut considérablement simplifier le problème en constatant que sur des plages à pente douce la quasi-totalité de l'énergie de la houle est dissipée dans la zone de surf. Les ondes réfléchies ont alors une amplitude négligeable par rapport à celle des ondes incidentes. Nous allons analyser dans les deux chapitres suivant la propagation de ces ondes, qualifiées « d'onde simple », tout d'abord sur un fond plat puis ensuite sur un fond lentement variable.

3. Propagation sur fond plat

On considère une onde continue (sans choc) se propageant sur un fond plat ($d = d_0$), dans le domaine $x > 0$. A l'instant initial ($t = 0$) l'eau est au repos. Pour $t > 0$, l'invariant de Riemann α^- est une constante, déterminée par la condition initiale $\alpha^- = -2c_0$, où $c_0 = (gd_0)^{1/2}$. On en déduit que l'invariant de Riemann α^+ s'écrit sous la forme $\alpha^+ = 2(u + c_0)$ et que les courbes caractéristiques C^+ sont des droites définies par $dx/dt = \frac{3}{2}u + c_0$. Ces ondes sont donc des ondes simples, régies par l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q(u)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

où $Q(u) = \frac{3}{4}u^2 + c_0 u$.

En présence de choc on doit introduire une nouvelle condition de saut $-U_0[u] + [Q(u)] = 0$, où U_0 est la vitesse du choc. Cette condition peut s'écrire de façon équivalente :

$$U_0 = \frac{3}{4}(u_1 + u_2) + c_0 \quad (14)$$

Le modèle d'onde simple repose sur le fait qu'un des invariants de Riemann (ici α^-) est constant. Il est nécessaire d'évaluer dans quelle mesure cette hypothèse est vérifiée à travers un choc. Pour cela nous exprimons $[\alpha^-]$ à partir des conditions de saut (10) et (11) et du paramètre $\gamma = (h_2 - h_1)/h_m$ ($h_m = (h_2 + h_1)/2$), qui caractérise l'intensité du choc. Si l'on considère que h_m/d_0 est d'ordre 1, on trouve alors que :

$$\frac{[\alpha^-]}{\alpha_0^-} = \frac{\gamma/2}{(1 - (\gamma/2)^2)^{1/2}} - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{1/2} \quad (15)$$

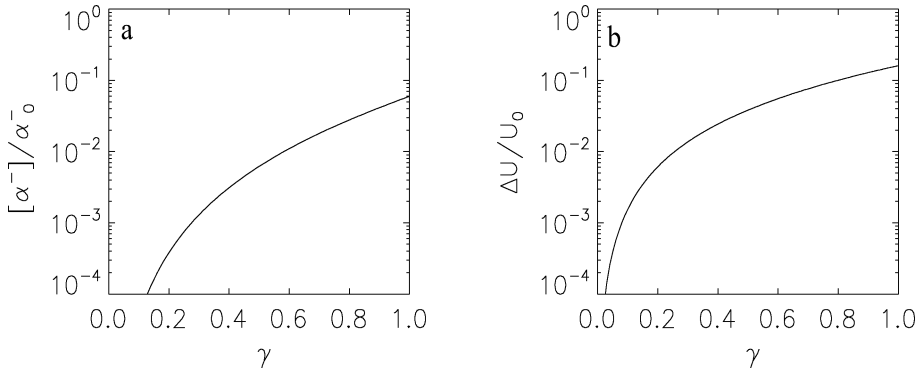


Figure 1. Évolution de (a) $[\alpha^-]/\alpha_0^-$ (voir (15)) et (b) $\Delta U/U_0$ (voir (16)) en fonction de l'intensité du choc γ .
Figure 1. Evolution of (a) $[\alpha^-]/\alpha_0^-$ (see (15)) and (b) $\Delta U/U_0$ (see (16)) as a function of the shock intensity γ .

Dans la ZSI, γ est généralement compris entre 0,3 et 0,8. La figure 1a montre que les variations de α^- à travers le choc sont le plus souvent inférieures à 1%.

Il reste maintenant à vérifier la validité de la condition de saut (14), qui n'est qu'une approximation des conditions (10) et (11). Pour cela nous cherchons à exprimer la différence ΔU entre la vitesse exacte du choc U et la vitesse approchée U_0 , en fonction de γ . L'équation (10) nous donne : $U = u_1 + ((gh_2h_m)/h_1)^{1/2}$ et en combinant les équations (10), (11) et (14) on obtient :

$$U_0 = \frac{3}{2}u_1 + c_0 + \frac{3}{4}(h_2 - h_1) \left(\frac{gh_m}{h_1h_2} \right)^{1/2}$$

À l'avant du choc on peut déterminer la vitesse u_1 en fonction de c_1 et c_0 en considérant que α^- est constant ($u_1 = 2(c_1 - c_0)$). On en déduit alors l'expression suivante :

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{4 - \gamma - 2^{1/2}(2 + \gamma)^{1/2}(2 - \gamma)}{3(\gamma + 2^{1/2}(2 + \gamma)^{1/2}(2 - \gamma)) - 4(2 - \gamma)^{1/2}(2 + \gamma)^{1/2}} \quad (16)$$

La figure 1b montre que l'erreur sur l'estimation de la vitesse du choc à partir du modèle onde simple est plus importante que celle concernant α^- et peut atteindre 10%. La solution onde simple, qui est exacte lorsque l'écoulement varie continuellement (13) et approchée en présence de choc (14), peut donc être considérée comme satisfaisante lorsque ces chocs, comme dans la ZSI, sont d'intensité faible à modérée. Ce modèle onde simple va nous permettre d'obtenir des solutions analytiques pour les vagues se propageant en ZSI.

Dans le référentiel R_0 se déplaçant à la vitesse c_0 , l'équation des ondes simples s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

avec la condition de saut : $U_0 = \frac{3}{4}(u_1 + u_2)$. L'équation (17) signifie que u est constante le long des droites caractéristiques $dx/dt = c_p$ ($c_p = \frac{3}{2}u$). Considérons une perturbation de vitesse initiale variant périodiquement autour de 0 avec une longueur d'onde λ et possédant la propriété de symétrie suivante : $u(-x, t = 0) = -u(x, t = 0)$, pour $x \in [-\lambda/2, \lambda/2]$. La vitesse de propagation c_p étant proportionnelle à u , le champ d'onde va se distordre tout en préservant sa symétrie. Les chocs vont se former aux points x_d tels que la dérivée $\frac{\partial}{\partial x}(c_p(x, 0))$ est maximale et se produisent à $t = -1/(\partial c_p/\partial x)|_{x_d}$. La distorsion du champ d'onde se poursuit jusqu'à ce que les vagues aient une forme en dents de scie [6]. Cette forme est une des

P. Bonneton

principales caractéristiques des vagues observées en ZSI. Du fait de la symétrie du problème la vitesse des chocs est nulle dans le référentiel R_0 . Le champ d'onde évolue ensuite en préservant cette forme tout en dissipant son énergie.

On considère maintenant que l'origine des temps ($t = 0$) correspond à l'apparition du régime en « dents de scie » : $u(x, t) = \mathcal{U}(t)(x/(\lambda/2))$ pour $x \in [-\lambda/2, \lambda/2]$. À partir de la théorie des ondes simples de Whitham [6], appliquée à l'équation (17), on peut montrer que :

$$\frac{\mathcal{U}(t)}{\mathcal{U}(0)} = \left(1 + \frac{3\mathcal{U}(0)t}{\lambda}\right)^{-1} \quad (18)$$

L'amplitude du champ d'onde $H = h_2 - h_1$ étant liée à \mathcal{U} par la relation $H = 2c_0\mathcal{U}/g$, on obtient alors l'équation :

$$\frac{H(t)}{H(0)} = \left(1 + \frac{3gH(0)t}{2c_0\lambda}\right)^{-1} \quad (19)$$

qui caractérise entièrement l'évolution d'une onde « dents de scie » sur fond plat. En particulier, on peut calculer l'énergie \bar{E} , le flux d'énergie \bar{F} et la dissipation \bar{D} des vagues, moyennées sur une longueur d'onde, en fonction de H et γ ($\gamma = H/d_0$) :

$$\bar{E} = \frac{\rho g H^2}{12} \left(1 + \frac{3}{138}\gamma^2\right), \quad \bar{F} = \frac{\rho c_0 g H^2}{12} \left(1 + \frac{3}{20}\gamma^2\right), \quad \bar{D} = \frac{\rho c_0 g H^3}{4\lambda d_0} \left(1 + \frac{3}{64}\gamma^2\right) \quad (20)$$

4. Propagation sur fond lentement variable

Lorsque les vagues se propagent en ZSI sur un fond variable, tel que $\beta(x) = -\partial d/\partial x > 0$, les effets dispersifs sont négligeables devant les effets non-linéaires et dissipatifs. En revanche, sur fond plat les effets dispersifs qui ne sont pris en compte dans les équations de Saint-Venant, peuvent conduire à la disparition des fronts d'onde (arrêt du déferlement). Si la solution analytique obtenue au chapitre précédent ne décrit qu'une partie des processus physiques associés à la propagation des vagues sur fond plat, en revanche elle apporte une estimation locale pertinente de \bar{F} et \bar{D} pour des fonds lentement variables. En négligeant les termes en γ^2 et en introduisant la fréquence de l'onde $f = c_d/\lambda$ ($c_d = (gd)^{1/2}$) on obtient :

$$\bar{F} = \frac{\rho c_d g H^2}{12}, \quad \bar{D} = \frac{\rho g f H^3}{4d} \quad (21)$$

Pour un forçage stationnaire des vagues, l'équation de conservation de l'énergie dans la ZSI s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = -\bar{D} \quad (22)$$

On en déduit l'équation d'évolution de la hauteur des vagues :

$$\frac{\partial}{\partial x} (d^{1/2} H^2) = -\frac{3f H^3}{g^{1/2} d} \quad (23)$$

Dans le cas d'un fond linéairement variable ($d = d_0 - \beta x$), tel que $x = 0$ correspond au début de la ZSI, on obtient la solution suivante pour H :

$$\frac{H}{H_0} = \left(\sigma \left(\frac{d}{d_0} \right)^{-1/2} + (1 - \sigma) \left(\frac{d}{d_0} \right)^{1/4} \right)^{-1} \quad (24)$$

où $H_0 = H(0)$, et $\sigma = 2f H_0 / (\beta c_0)$.

Figure 2. Hauteur des vagues adimensionnée en fonction de la profondeur d'eau. Comparaison entre le modèle analytique (voir (24)) et les expériences de Stive [7], $\beta = 1/40$. ● ● ● ●, $H_0 = 0,178$ m, $d_0 = 0,2125$ m, $f = 1/1,79$ s⁻¹ (test 1); ◇ ◇ ◇ ◇, $H_0 = 0,226$ m, $d_0 = 0,2625$ m, $f = 1/3$ s⁻¹ (test 2).

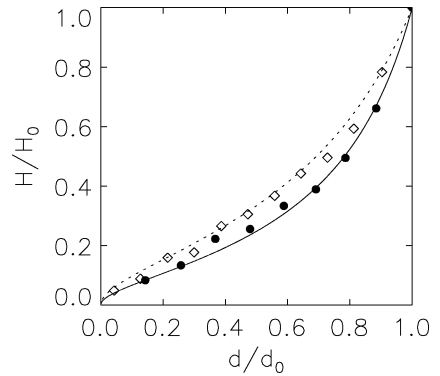


Figure 2. Normalized wave height versus water depth. Comparison between the analytical model (see (24)) and experiments by Stive [7], $\beta = 1/40$. ● ● ● ●, $H_0 = 0.178$ m, $d_0 = 0.2125$ m, $f = 1/1.79$ s⁻¹ (test 1); ◇ ◇ ◇ ◇, $H_0 = 0.226$ m, $d_0 = 0.2625$ m, $f = 1/3$ s⁻¹ (test 2).

Une équation similaire a déjà été proposée par Stive [7], à partir d'une approche théorique linéaire associée à des paramètres ajustés par des calibrations expérimentales. La figure 2 montre que notre modèle théorique non-linéaire (24), qui ne nécessite aucune calibration, est en très bon accord avec les mesures réalisées en canal à houle par Stive [7].

Le modèle onde simple permet donc de décrire la distorsion des vagues dans la ZSI et en particulier de déterminer l'évolution de l'énergie des vagues à l'approche de la côte.

Remerciements. Ces travaux ont été réalisés dans le cadre de deux programmes nationaux de l'INSU : le PNEC (Programme National d'Environnement Côtier) et le PATOM (Programme ATmosphère Océan à Multi-échelles). Nous remercions Luc Hamm pour avoir mis à notre disposition une base de données issue du projet MAST-G8M.

Références bibliographiques

[1] Svendsen I.A., Wave heights and set-up in a surf zone, *Coast. Eng.* 8 (1984) 303–329.
 [2] Le Méhauté B., On the non-saturated breaker theory and the wave run-up, in: *Proc. 8th Coastal Engineering Conf.*, 1962, pp. 77–92.
 [3] Kobayashi N., DeSilva G.S., Watson K.D., Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slopes, *J. Geophys. Res.* 94 (1989) 951–966.
 [4] Bonneton P., Vincent S., Dupuis H., Pedreros R., Modelling of wave transformation across the inner surf zone and swash oscillations on beaches, in: *Proc. of the 4th Int. Conf. on Computer Modelling of Seas and Coastal Regions*, Wit Press, 1999, pp. 77–86.
 [5] Stoker J.J., *Water Waves*, Interscience, New York, 1957.
 [6] Whitham G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, New York, 1974.
 [7] Stive M.J.F., Energy dissipation in waves breaking on gentle slopes, *Coast. Eng.* 8 (1984) 99–127.